Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Ricordo:

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

$\forall D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ decomp. di $[a,b]$

$$\left.\begin{aligned} s_D^f &= \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)\,(x_{i+1} - x_i) \\ S_D^f &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)\,(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}$$

Si considera l'insieme delle somme inferiori

$$\sigma = \{ s_D^f : D \text{ decomp. di } [a,b] \}$$

e l'insieme delle somme superiori

$$\Sigma = \{ S_D^f : D \text{ decomp di } [a,b] \}$$

Abbiamo visto che i due insiemi σ e Σ sono separati ($\sigma \leq \Sigma$)

<u>Def</u> Diremo che $f(x)$ è Riemann integrabile

se

$$\sup \sigma = \inf \Sigma$$

e in tal caso

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sup \sigma = \inf \Sigma}$$

<u>Nota</u> $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

<u>Criterio</u> (Riemann integrabilità)

Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

è Riemann integrabile

$$\Longleftrightarrow$$

vale

(R) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D_\varepsilon$ decomp. di $[a,b]$ tale

$$S^f_{D_\varepsilon} - s^f_{D_\varepsilon} < \varepsilon$$

I seguenti teoremi garantiscono la Riemann integrabilità di alcune classi di funzioni

<u>Teorema 1</u>

se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua

$\Longrightarrow$ F è Riemann integrabile

Teorema 2

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata è monotona

$\Longrightarrow$ f è Riemann integrabile

Dim Supponiamo $f(x)$ decrescente

$$x \le y \iff f(x) \ge f(y)$$

Voglio verificare la condizione (R)

$\boxed{\forall \varepsilon > 0}$

Caso 1 $f(x) = c$ (funzione costante)

Osserva che $\forall D$ decomp di $[a,b]$

essendo $\inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f = \sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f = c$

$$\Longrightarrow \quad I_D^f = S_D^f \quad \text{e quindi}$$

$$S_D^f - I_D^f = 0 < \varepsilon \qquad \text{OK}$$

Caso 2

Supponiamo $f(x)$ non è costante

$$\Longrightarrow \quad f(a) > f(b)$$

Scelgo D_ε una qualunque decomp. di $[a,b]$
tale che $D_\varepsilon = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$$x_{i+1} - x_i < \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)}$$

Provo che per tale scelta di D_ε è verificata (R)
Poiché $f(x)$ è decrescente si ha

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1})$$

$$\sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i)$$

Da cui

$$S^f_{D_\varepsilon} - s^f_{D_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)\,(x_{i+1} - x_i) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)\,(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i)$$

$i=0 \qquad\qquad\qquad i=0$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) - f(x_{i+1})]\,(x_{i+1} - x_i)$$

(scelta di D_ε)

$$< \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) - f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)} \Big[\big(f(a) - \cancel{f(x_1)}\big) + \big(\cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_2)}\big) + \cancel{\dots}$$

$$\dots + \big(f(x_{n-2}) - \cancel{f(x_{n-1})}\big) + \big(\cancel{f(x_{n-1})} - f(b)\big) \Big]$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{f(a)-f(b)}} \big(\cancel{f(a) - f(b)}\big) = \varepsilon$$

Ossia (R) è verificato, quindi $f(x)$ è Riemann integrabile $\blacksquare$

<u>Def</u> (Integrale definito)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata Riemann integrabile

Fisso $x_0, x_1 \in [a,b]$

Definiamo

$$\int^{x_1} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx & \text{se } x_0 < x_1 \\ \end{cases}$$

(ossia l'integrale di Riemann)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \begin{cases} \\ -\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx & \text{se } x_1 < x_0 \end{cases}$$

(... di Riemann)

Funzione Integrale

Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e Riemann integrabile

e sia $x_0 \in [a,b]$

Definiamo una nuova funzione

$\forall x \in [a,b]$

$$\boxed{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

Ad ogni $x \in [a,b]$ associamo uno ed un solo numero

Teorema (Torelli)

Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua

$$\Longrightarrow F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{è}$$

(1) derivabile su $]a,b[$

(2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$

Corollario Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$

$$\Longrightarrow f(x) \text{ ammette primitive}$$

Teorema (Fondamentale del calcolo integrale)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

e sia G una qualunque primitiva di $f(x)$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

Dim Segue dal teorema di Torelli:

$G(x)$ è primitiva di $f(x)$

anche $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è anche primitiva di $f(x)$

$$\Longrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c$$

$$G(b) - G(a) = \left(F(b) + \cancel{c}\right) - \left(F(a) + \cancel{c}\right) =$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \cancel{\int_a^a f(x)\,dx}^{\,0} =$$

$$= \int_a f(x)dx - \cancel{\int_a f(x)\,dx} =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

Esercizio

$$\int \underbrace{\frac{\sin x}{\sin^2 x - 3\sin x + 2}}_{g(f(x))} \cdot \underbrace{\cos x}_{f'(x)}\, dx \overset{1^\circ \text{ sost}}{=}$$

$$= \left.\int \frac{z}{z^2-3z+2}\,dz\ \right]_{z=\sin x}$$

Passo 2 Decomp. denom.

$$\Delta = 9 - 4\cdot 2 = 1 \implies z_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$$\implies \frac{z}{z^2-3z+2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

Passo 3 Ricerca costant.

$$\boxed{\frac{0z+0}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}}$$

$$\boxed{\frac{\ldots}{(z-1)(z-2)} = \frac{\ldots}{z-1} + \frac{\ldots}{z-2}}$$

$$= \frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-1)(z-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)z + (-2A-B)}{(z-1)(z-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=0 \end{cases} \longrightarrow B=-2A \qquad \xrightarrow{1^a} \quad A + \underbrace{(-2A)}_{B} = 1$$

$$-A = 1 \Rightarrow A=-1$$

$$B=2$$

Passo 4 Sostituisco le cost. del Passo 3

$$\int \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz = -\int \frac{1}{z-1}\,dz + 2\int \frac{1}{z-2}\,dz =$$

$$= -\lg|z-1| + 2\lg|z-2| + \text{cost}$$

$$(z=\sin x) \quad = -\lg|\sin x-1| + 2\lg|\sin x-2| + \text{cost}$$

__Esercizio__ $\int_1^2 \log x \, dx$

Calcolo una primitiva

$$\int \log x \, dx = \int \underset{f'(x)}{1} \cdot \underset{g(x)}{\log x} \, dx =$$

(parti) $= x \cdot \log x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$

$$= \underbrace{x \log x - x = G(x)}$$

Dal calcolo fondamentale dell'int.

$$\int_1^2 \log x \, dx = G(2) - G(1)$$

$$= (\underbrace{2 \cdot \log 2 - 2}_{G(2)}) - (1 \cdot \cancel{\log 1}^{\,0} - 1) =$$

$$= 2 \log 2 - 2 + 1 = 2 \log 2 - 1$$

__Esercizio__ $\int_1^3 \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}} \, dx$

Cerco primitiva

$\int \frac{1}{\quad} dx \; \xrightarrow{(2^a \text{ sost})}$

$$\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}}\,dx \quad \underline{\underline{(2^a \text{ sost})}}$$

$$t = \sqrt{x} \iff \boxed{x = t^2} = F(t)$$

$$F'(t) = 2t$$

$$= \int \frac{1}{(t^2+4)\cdot \cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\,dt =$$

$$= 2 \int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} \int \frac{1}{\frac{t^2}{4}+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt$$

$z = \frac{t}{2}$

$dz = \frac{1}{2}\,dt$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = \int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$= G(x)$$

Dal TFCI otteniamo

$$\int_1^3 \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}}\,dx = G(3) - G(1) =$$

$$= \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{G(3)} - \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)}_{G(1)}$$

Esercizio

$$\int \frac{x^5+4}{x^2+3x+2}\,dx$$

Passo 1 Divisione Euclidea

$$\begin{array}{l|l}
x^5+4 & x^2+3x+2 \\
\hline
x^5+3x^4+2x^3 & \underbrace{x^3-3x^2+7x-15}_{A(x)} \\
\hline
-3x^4-2x^3+4 & \\
-3x^4-9x^3-6x^2 & \\
\hline
7x^3+6x^2+4 & \\
7x^3+21x^2+14x & \\
\hline
-15x^2-14x+4 & \\
-15x^2-45x-30 & \\
\hline
\underbrace{31x+34}_{R(x)} &
\end{array}$$

$$\frac{x^5+4}{x^2+3x+2} = A(x) + \frac{R(x)}{x^2+3x+2}$$

$$= (x^3-3x^2+7x-15) + \frac{31x+34}{x^2+3x+2}$$

$$\longrightarrow \int \frac{x^5+4}{x^2+3x+2}\,dx = \int (x^3-3x^2+7x-15)\,dx +$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3+4}{x^2+3x+2}\,dx = \int (x^3-3x^2+7x-15)\,dx +$$

$$+ \int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + 7\frac{x^2}{2} - 15x\right) + \int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}\,dx$$

A parte

$$\int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}\,dx$$

Passo 2

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\frac{31x+34}{x^2+3x+2} = \frac{31x+34}{(x+2)(x+1)}$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\boxed{\frac{31x+34}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x+2)}{} = \frac{(A+B)x + (A+2B)}{}$$

$(x+2)(x+1)$ $(x+2)(x+1)$

$$\begin{cases} A+B=31 \\ A+2B=34 \end{cases} \longrightarrow B = 31 - A$$

2e $\longrightarrow$

$$A + 2(31-A) = 34$$

$$-A + 62 = 34$$

$$A = 62 - 34 = 28$$

$$B = 31 - 28 = 3$$

Passo 4 Sostituisco le costanti al Passo 3

$$\int \frac{31x+34}{(x+2)(x+1)}dx = 28\int \frac{1}{x+2}dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 28 \lg|x+2| + 3 \lg|x+1| + \underline{\underline{cost}}$$

Esercizio

$$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}dx$$

$\Delta < 0$

Passo 3 Ricerca cost.

$$\frac{3x-2}{\quad} = \frac{A}{\quad} + \frac{Bx+C}{\quad}$$

$$\boxed{\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}}$$

$$= \frac{A(x^2-2x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+2)} =$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2-2x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(2A-C)}{(x-1)(x^2-2x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=3 \\ 2A-C=-2 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $B=-A$

$\xrightarrow{2°}$ $-2A+A+C=3 \Rightarrow C=3+A$

$\xrightarrow{3°}$ $2A-(3+A)=-2$

$\Rightarrow A=1$

$B=-1$

$C=4$

Passo 4 Sostituisco le cost.

$$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-x+4}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= \log|x-1| + \int \frac{-x+4}{x^2-2x+2}\,dx$$

A parte

$$\int \frac{-x+4}{x^2-2x+2}\,dx = -\int \frac{x-4}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)-6}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx - \frac{1}{2}\cdot(-6)\cdot\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2-2x+2| + 3\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$$

A parte svolgo

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx \overset{1^a\,sost}{=}$$

Se $z = x-1 \quad dz = dx$

$$= \int \frac{1}{z^2+1}\, dz = \operatorname{arctg} z =$$

$$= \operatorname{arctg}(x-1)$$